二次元流体における集団運動

京都大学 理学研究科　森田 英俊 [1]

背景　二次元乱流において，巨視的な定常流が自己組織化されることがよく知られている．木星の大赤斑のような渦，黒潮のようなジェット流などがその代表例である．これらの巨視的定常流が，二次元 Euler 方程式に平衡統計力学を適用したときの「平衡」，すなわちあるエントロピーの最大状態として記述されることがわかってきた [1)]．しかし従来，これらの研究は主として定常流（～「平衡」状態）およびその近傍の流れに限られてきた．一方，平衡統計力学が通常適用される熱力学系は，平衡状態から離れるにつれて，非平衡定常状態，さらに分岐を起こしてリミットサイクル等の巨視的非定常運動を生むことはよく知られている．この非平衡系の一般的知見から類推して，二次元乱流においても，巨視的定常流から遠く離れたところで，非定常流がみられることが期待される．本発表では，この非定常流が実際に見られたこと，およびその機構について報告した [2)]．

モデル　アスペクト比 Γ の二重周期境界の平面上において，二次元 Euler 方程式 $\partial_t\omega + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\omega = 0$ を考える；ここで，$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ は速度場，$\omega = \partial_x v_y - \partial_y v_x$ は渦度場．

この系は $\Gamma > 1$ のとき，y 方向の速度が零の定常解を持つことが示される．その渦度場のパターンから zonal flow と呼ばれる．また，$\Gamma = 1$ のときは，正負の大きな渦度クラスターが存在する定常解を持つことも示される．これは dipole flow と呼ばれる．これらの解は，前述の統計力学の枠組でのエントロピー最大状態でもある．

以下，$\Gamma > 1$ を考える．この定常的な zonal flow を base flow とする．これに対し，時刻 $t = 0$ で空間的にゆるやかなある変位を与える．その強度を ϵ で表す．この ϵ は初期状態の定常状態からの遠さを表すパラメーターである．

現象　この初期条件から始めると，系は比較的短時間の後，安定した挙動に達する．この挙動は系のパラメーター (ϵ, Γ) により三種類に分かれる．これはオーダーパラメーター $Z(t) = -\mathrm{Re}\,\hat{\omega}_{(1,0)}(t)$ により定量できる；ここで $\hat{\cdot}_{\boldsymbol{q}}(t)$ は $\cdot(t, \boldsymbol{r})$ の Fourier 変換．

一つ目は base flow と同様の zonal flow である．二つ目は，base flow 自体がなくなり，dipole flow になる．これらは巨視的なレベルでは定常状態である；前者では $Z(t)$ は零，後者では有限値で時間的に一定．そして前述のようにこれらは統計力学的なエントロピー最大状態である．すなわちこの二つはエントロピー最大状態への緩和したことになる．

注目すべき三つ目は，これらと異なり，非定常状態である．base flow の他に，その流線に沿って二組の正負の渦がペアとなって運動してゆく．これにより，$Z(t)$ は時間的に振動する．これはこれまで知られていなかった，新しいクラスの時空パターンである．

[1]E-mail: hidetoshi.morita@scphys.kyoto-u.ac.jp

分岐　アスペクト比Γ一定の下で初期変位の強度ϵを大きくする，すなわち初期状態をエントロピー最大状態から遠ざけてゆくと，安定状態での挙動はzonal flowから振動状態へと転移する．この転移＝分岐の，分岐点近傍での様子を調べる．すると，オーダーパラメーター$Z(t)$の時間振動の振幅が$(\epsilon-\epsilon_c)^{1/2}$のようにある$\epsilon_c$から立ち上がることが分かる．これはHopf分岐と同様であり，低次元性が示唆される．つまり，無限自由度保存力学系である二次元Euler方程式の中に，低次元力学系の構造が見出される．

動的自己無撞着解析　この振動状態が安定性を保つ機構について，動的な自己無撞着解析により考察する．時間振動的な補助流れ関数ψ_{aux}の中を運動する試験点渦の一体問題を考える．この点渦の集団がつくる渦度場ω_{pv}に対応する流れ関数ψ_{pv}が補助場ψ_{aux}に一致すれば，この集団運動はもとの二次元Euler方程式を再現していることになる．

この一体問題のPoincaré断面をとってみる．base flowが速いところにはKAMトーラスが残っており，遅いところにはchaotic seaができている．さらに，このchaotic seaの中に補助場への一対一共鳴のトーラス島がある．注目すべきは，この共鳴の位置が，元々の二次元Euler方程式における渦度クラスターの位置と完全に一致していることである．

これより，この振動状態の安定性が次のように説明できる：ひとたび，この共鳴の位置に渦度が集中したとする．その集中した渦度はbase flowの流れに沿って運動し，時間振動的な場を生成する．するとこの振動場それ自体によって，この渦度はトーラスの中に閉じ込められ拡散しない．ψ_{aux}とψ_{pv}はある条件の下で実現する．こうして振動状態は自己無撞着に安定して自続する．

考察　二次元流体系とHamilton力学系の類似性はよく知られている．今回報告した現象は，著者と金子が以前報告した，大自由度Hamilton系における集団運動[3]と同質のものである．二次元流体の優位性は，実験や観測と対応が付けられることにあるだろう．

この現象はEuler流体に特異的な現象ではない．高Raynolds数の二次元確率的Navier-Stokes方程式（外力が平均して零）においても同様のことが見られる．ただし，Euler流体と異なりずっと安定しているわけではなく，この状態の生成と崩壊とを繰り返す．

謝辞　本研究は文部科学省グローバルCOEプログラム「普遍性と創発性から紡ぐ次世代物理学」の支援を受けている．

参考文献

1) R. Robert, J. Stat. Phys. **65** (1991), 531.

2) H. Morita, preprint.

3) H. Morita and K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **96** (2006), 050602.